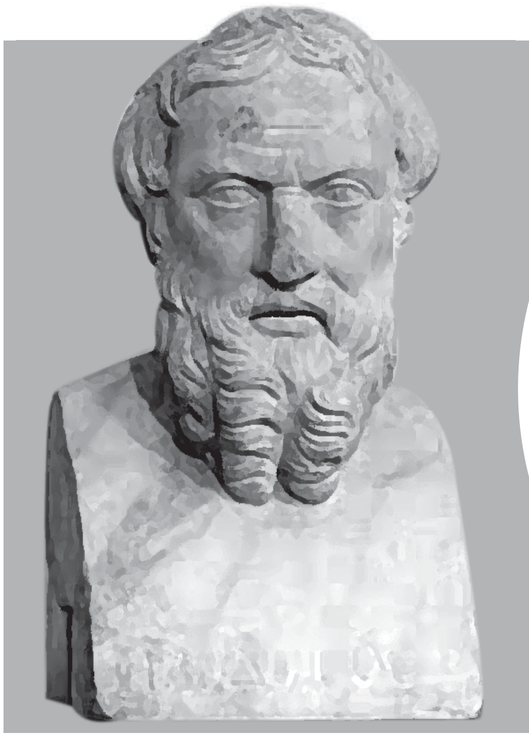
نویسنده: **پاول اتا وای**
ترجمه و تشریح: **عباس قلعه پوراقدم**، دبیر ریاضی از ارومیه

**اشاره**

شهرت ریاضی‌دانان یونان باستان بیشتر به واسطهٔ دانش هندسهٔ آنان است. یکی از این مشاهیر، دانشمند و ریاضی‌دانی به‌نام *آپولونیوس* بود که بیشتر روی مقاطع مخروطی و دانش ستاره‌شناسی مطالعه می‌کرد. او در حدود ۲۲۰۰ سال پیش می‌زیست، لیکن از زندگی‌نامه‌اش اطلاع قابل اعتماد و دقیقی در دست نیست. این دانشمند نابغه پرسش جالبی را درخصوص مبحث دایره‌ها مطرح کرد که از آن زمان «مسئلهٔ آپولونیوس» نام گرفته است.

**کلیدواژه‌ها:** آپولونیوس، دایره، مماس، سهمی، محاطی، محیطی.



# مسئلهٔ آپولونیوس

## طرح مسئله

نقطه، خط و دایره را به‌عنوان سه شئ هندسی در نظر می‌گیریم.

**پرسش آپولونیوس:** چند دایره می‌توان رسم کرد که بر هر سه شئ مماس باشد؟ (در اینجا مقصود از مماس‌بودن بر یک نقطه، گذشتن از آن نقطه است.)

اگر نقطه را با P (حرف اول Point)، خط را با L (حرف اول Line) و دایره را با C (حرف اول Circle) نمایش دهیم، پرسش آپولونیوس پس از حذف حالت‌های تکراری به ۱۰ زیر مسئله منجر می‌شود که آن‌ها را به همراه علامت اختصاری مطرح می‌کنیم:

**۱.** چند دایره می‌توان رسم کرد که از سه نقطهٔ مفروض بگذرند؟ (PPP)

**۲.** چند دایره می‌توان بنا کرد به‌طوری که بر سه خط مفروض مماس باشند؟ (LLL)

**۳.** چند دایره می‌توان رسم کرد که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد و بر خط مفروضی مماس باشد؟ (LPP)

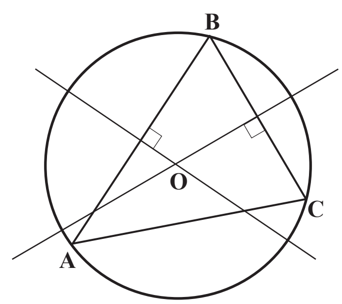
و به‌همین صورت:

**۴.** LLP؛
**۵.** CPP؛
**۶.** CLP؛
**۷.** CCP؛
**۸.** CLL؛
**۹.** CCL؛
**۱۰.** CCC.

در این مقاله قصد پرداختن به سه مورد اول را داریم که جزو ساده‌ترین آن‌ها هستند.

## دایره‌ای که از سه نقطهٔ مفروض می‌گذرد

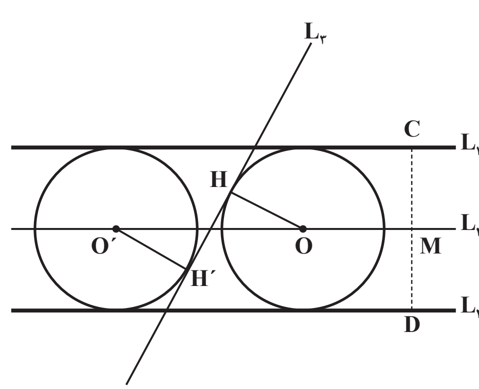
اگر هر سه نقطه روی یک خط مشترک باشند، دایره‌ای که از هر سه نقطه بگذرد، وجود ندارد. در غیر این صورت سه نقطه یک مثلث خواهند ساخت. در واقع جواب مسئله، دایرهٔ محیطی این مثلث است. سه نقطه را A، B و C می‌نامیم و پاره‌خط‌های AB و BC را رسم می‌کنیم. حال عمودمنصف‌های این پاره‌خط‌ها را بنا می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن‌ها را O می‌نامیم. (از هندسه به یاد آورید که در هر دایره، قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند.) چون O روی عمودمنصف AB است، پس O از A و B به یک فاصله است. با همین استدلال در می‌یابیم که O از B و C نیز به یک فاصله است. پس O از هر سه نقطهٔ A، B و C فاصلهٔ یکسانی دارد. این فاصله را R می‌نامیم و به مرکز O و به شعاع R دایره‌ای رسم می‌کنیم. O را مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC و دایرهٔ رسم شده را دایرهٔ محیطی مثلث می‌نامیم. این دایره منحصربه‌فرد است؛ یعنی تعداد جواب‌ها فقط یکی است.




## دایره‌ای که بر سه خط مفروض مماس است.

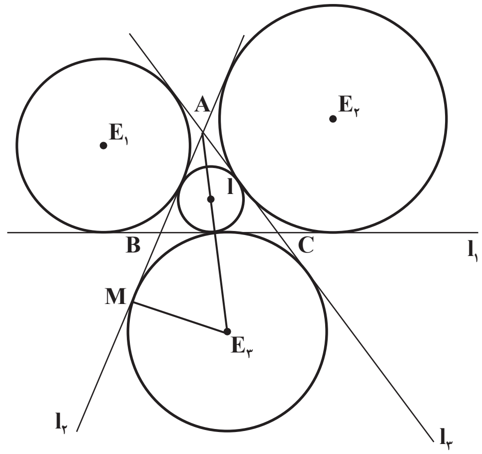
**الف)** اگر هر سه خط موازی باشند، دایره‌ای نمی‌توان یافت که به هر سه مماس باشد.

ب) اگر دوتا از سه خط موازی باشند، تعداد دایره‌ها دوتا خواهند بود که در شکل مشخص شده‌اند.




$L_1$، $L_2$ و $L_3$ سه خط مفروض هستند که: $L_1 \| L_2$ و $L_3$ آن دو را قطع می‌کند. خط $L_4$ را که موازی $L_1$ و $L_2$ است و از نقطهٔ M (وسط پاره‌خط CD که فاصلهٔ دو خط $L_1$ و $L_2$ است) می‌گذرد، رسم می‌کنیم. هر نقطه روی $L_4$ می‌تواند مرکز دایره‌ای به شعاع CM باشد که بر هر دو خط $L_1$ و $L_2$ مماس است. لیکن برای اینکه دایرهٔ موردنظر بر $L_3$ هم مماس باشد، مرکز باید نقطه‌ای روی $L_4$ باشد؛ به‌طوری‌که OH (پاره‌خط عمود بر $L_3$) برابر CM شود. در سمت چپ $L_3$ نیز برای دایرهٔ دوم چنین وضعیتی را داریم.

ج) اگر هیچ زوجی از خطوط موازی نباشند، دایره‌ها چهارتا خواهند بود. سه خط مفروض $l_1$، $l_2$ و $l_3$ یکدیگر را در سه نقطهٔ A، B و C قطع کرده‌اند و این سه نقطه، مثلث ABC را تشکیل داده‌اند. در این حالت چهار دایره وجود دارند که بر هر سه خط مماس‌اند. این چهار دایره عبارت‌اند از:




**۱. دایرهٔ محاطی مثلث ABC:**

مرکز آن نقطهٔ I است که محل برخورد نیم‌سازهای زوایای داخلی مثلث است و شعاع آن که با r نشان داده می‌شود، از روابط $r=\frac{S}{P}$ یا $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ قابل محاسبه است. در این دو رابطهٔ S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است که مقدارش از رابطهٔ $2R=\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$ به‌دست می‌آید.

### ۲. دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس A:

مرکز این دایره نقطهٔ $E_۳$ و شعاع آن که با $r_a$ نشان داده می‌شود، از رابطهٔ $r_a = ۴R\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}$ قابل محاسبه است. برای یافتن موقعیت $E_۳$ کافی است ضلع AB را امتداد دهیم و روی آن AM=P را جدا کنیم. در نقطهٔ M عمودی بر AM رسم می‌کنیم. محل برخورد این عمود و امتداد نیم‌ساز زاویهٔ A، نقطهٔ $E_۳$ خواهد بود.

### ۳. دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس B:

مرکز این دایره نقطهٔ $E_۲$ و شعاع آن $r_b = ۴R\sin\frac{B}{۲}\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{C}{۲}$ است.

### ۴. دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس C:

مرکز این دایره نقطهٔ $E_۱$ و شعاع آن $r_c = ۴R\sin\frac{C}{۲}\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}$ است.

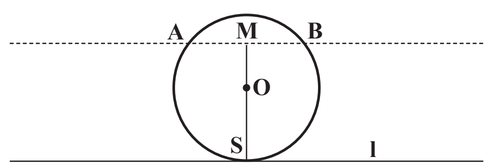
برای آشنایی بیشتر با روابط مطرح شده در این قسمت می‌توانید به کتاب «مثلثات پایه»، فصل سوم، اثر زنده‌یاد **جلیل‌الله قراگوزلو** مراجعه کنید. همچنین زندگی‌نامهٔ این استاد گران‌قدر را در شمارهٔ ۹۰ برهان (دی ۱۳۹۴) می‌توانید ببینید.

## دایره‌ای که از دو نقطهٔ مفروض گذشته و بر خط مشخصی مماس باشد

الف) اگر دو نقطهٔ مفروض در دو طرف خط موردنظر باشند، دایره‌ای وجود نخواهد داشت.

ب) اگر نقطه‌ها در یک طرف خط مفروض باشند، دو حالت متصور است:

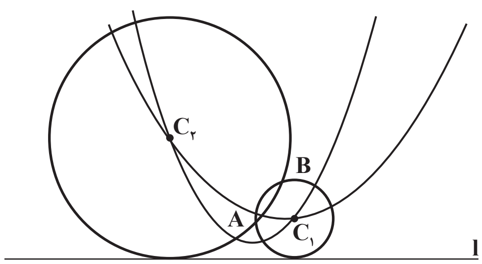
- اگر خط راستی که از دو نقطه می‌گذرد، با خط مفروض موازی باشد، دقیقاً یک جواب خواهیم داشت که در شکل زیر مشخص شده است. مرکز این دایره (O) روی پاره‌خط MS (فاصلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ A و B با خط مفروض l) و $OS = \frac{MS^۲ + MB^۲}{۲MS}$ خواهد بود که M وسط AB است.




- اگر خط ماربر دو نقطه، موازی با l نباشد، دو دایره خواهیم داشت که برای بنا کردن آن‌ها تعریف «سهمی» را یادآور می‌شویم.

**«سهمی»** مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت (خط هادی) و یک نقطهٔ ثابت (کانون سهمی) به یک فاصله هستند.

حال خط مفروض l را به‌عنوان خط هادی و هر یک از دو نقطه را به عنوان کانون یک سهمی در نظر می‌گیریم و حاصل این کار دو سهمی با خط هادی l و کانون‌های A و B خواهد بود. این دو سهمی یکدیگر را در دو نقطهٔ $C_۱$ و $C_۲$ قطع می‌کنند که این دو نقطه طبق تعریف سهمی از خط داده شده و نقاط A و B به یک فاصله هستند. نقاط $C_۱$ و $C_۲$ مرکز دایره‌هایی خواهند بود که شعاع آن‌ها $C_۱B=C_۱A$ و $C_۲B=C_۲A$ است. (توجه به این نکته خالی از لطف نیست که اگر دو نقطهٔ داده شده روی خطی موازی با l باشند، سهمی‌های تعریف شده فقط یک نقطه تقاطع خواهند داشت.)




**تمرین**

شما می‌توانید در مورد هفت حالت دیگر تلاش کنید. اگر توانستید حل کنید، به خود خواهید بالید که مسئله‌ای از مسائل آپولونیوس را حل کرده‌اید! در غیر این‌صورت مرور دانسته‌های هندسی‌تان ثمرهٔ این تلاش خواهد بود که بسیار با ارزش است.


**منابع**

۱. قراگوزلو، جلیل‌الله (۱۳۷۴). **مثلثات پایه**. انتشارات فاطمی. تهران. چاپ شانزدهم.

2. ottaway, paul. apollonius problem.crux mathematicorum with mathematical mayhem. vol 29. n7. (2003 November)